14/10/2015

Πρόσθεση - Αφαίρεση

Αντί της $x+y$, υπολογίζουμε της $z = fl(fl(x)+fl(y)) = fl(x(1+\varepsilon_1)+y(1+\varepsilon_2))\cdot$
$\cdot(1+\varepsilon_3) = x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)+y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = x(1+\varepsilon)^2+y(1+\delta)^2 =$
$x+y+2(x\varepsilon+yd)+\underline{x\varepsilon^2+yd^2} \simeq x+y+2(x\varepsilon+yd)$

$$\frac{|z-(x+y)|}{|x+y|} \simeq \left|\frac{x\varepsilon+yd}{xy}\right| \leq 2\frac{|x||\varepsilon|+|y||d|}{|x+y|} \leq 2\frac{|x|+|y|}{|x+y|}u.$$

a) x,y ομόσημοι: τότε $|x|+|y| = |x+y|$, επομένως το ελάχιστο φράγμα του σχετικού σφάλματος είναι $2u$.

b) x,y ετερόσημοι: τότε $\frac{|x|+|y|}{|x+y|} > 1$ και αν $x \simeq -y$, επομένως το κλάσμα γίνεται πολύ μεγάλο, με αποτέλεσμα να έχουμε πολύ μεγάλο σφάλμα.

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό της $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων)
$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (μετατρέψαμε την αφαίρεση σε διαίρεση και αφαίρεση) που το σφάλμα είναι μικρότερο

Άθροισμα πολλών αριθμών

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $S_n = \sum_{i=1}^{N} a_i$, υποθέτουμε ότι οι a_i είναι αριθμοί μηχανής. Ο αλγόριθμος είναι $S_1 = a_1$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε διαδοχικά $S_k = S_{k-1}+a_k$. Ο υπολογιστής θα υπολογίζει $\tilde{S_1} = a_1$ (το προσεγγ.)

$\tilde{S_k} = fl(\tilde{S}_{k-1}+a_k)$ για $k = 2,3,\ldots N$

$\tilde{S_1} = a_1$, $\tilde{S_2} = fl(\tilde{S_1}+a_2) = (a_1+a_2)(1+\varepsilon_1)$ $\quad \tilde{S_3} = fl(\tilde{S_2}+a_3) = (a_1+a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$
$+a_3$ $\quad \tilde{S_4} = fl(\tilde{S_3}+a_4) = (a_1+a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)+a_3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)+$
$a_4(1+\varepsilon_3) = (a_1+a_2)(1+d_1)^3+a_3(1+d_2)^2+a_4(1+d_3)$ $\quad |d_1|, |d_2|, |d_3| \leq u$
$\tilde{S_4} \simeq (a_1+a_2)(1+3d_1)+a_3(1+2d_2)+a_4(1+d_3) =$

$= S_4 + \underbrace{(a_1+a_2)3d_1 + a_3 2d_2 + a_4 d_3}_{\text{σφάλμα}}$

Επαγωγικά θα έχουμε $\tilde{S}_n \simeq S_N + (a_1+a_2)(N-1)d_1 + a_3(N-2)d_2 + a_4(N-3)d_3 + \ldots + a_n d_{n-1}$

Στο σφάλμα υπεισέρχονται ως παράγοντες σε άθροισμα τα a_i με βάρη: $(N+1-i)$

→ Η αφαίρεση δεν είναι ευσταθής πράξη

Υποθέτουμε ότι a_i ομόσημοι, $a_i \geq 0$. Αν οι αριθμοί a_i είναι διατεταγμένοι κατά φθίνουσα σειρά, τότε έχουμε μεγάλο σφάλμα επειδή οι πρώτοι αριθμοί πολ/νται με μεγαλύτερα βάρη
Συμπέρασμα: ο πιο ευσταθής αλγόριθμος για την εύρεση του αθροίσματος είναι να τους διατάξουμε σε αύξουσα σειρά

"Ευσταθια Αλγοριθμων"
Ενας αλγόριθμος λέγεται ευσταθής αν μικρά σφάλματα κατά τους υπολογισμούς επιφέρουν σχετικά μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα

Στο παράδειγμα $\underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}_{\text{ασταθής}} = \dfrac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}_{\text{ευσταθής}}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η ποσότητα e^x, $x<0$ $(x = -12.5)$
Αλγόριθμος 1 Υπολογίζω το μερικό άθροισμα $\sum_{i=0}^{N} \frac{x^i}{i!}$ αφού $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ και ότι $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \longrightarrow 0$

Για $N=34$ έχουμε σύγκλιση σε 5 σημαντικά ψηφία
Το αποτέλεσμα βρήκαμε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{34} \frac{x^i}{i!} = .169316 \cdot 10^{-2}$

Το ακριβές αποτέλεσμα του e^{-12} είναι $.3726653 \cdot 10^{-5}$
Ο υπολογιστής είναι $M = M(10, 7, -38, 38)$

Οι όροι του αθροίσματος είναι $1, -12.5, 78.125, -325.5208, \ldots$
(μεγαλώνουν απόλυτα μέχρι τον 13º όρο και μετά φθίνουν απότομα)
Ο 13ος : 30.379.68. Ο 13ος όρος αποθηκεύτηκε με σφάλμα της τάξης 10^{-2}. Το αποτέλεσμα είναι το άθροισμα κάποιων σφαλμάτων της τάξης 10^{-2}. Καταστροφική αύξηση σημαντικών ψηφίων.

Αλγόριθμος 2. Υπολογίζουμε το $e^{-12.5}$ ως $\frac{1}{e^{12.5}}$ $\left(e^{12.5}\right)^{-1} \simeq \left(\sum_{i=0}^{34} \frac{(12.5)^i}{i!}\right)^{-1} =$
$.3726653 \cdot 10^{-5}$